首届全国大学生数学竞赛赛区赛试卷参考答案

（非数学类，2009）

一、　填空题

（1）计算 $\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}dxdy=$____________，其中区域$D$由直线$x+y=1$与两坐标轴所围三角形区域.

（2）设 $f(x)$ 是连续函数，满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)dx-2$，则 $f(x)=$________________.

（3）曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是________________.

（4）设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$________________.

答案：$\frac{16}{15}$，$3x^2-\frac{10}{3}$，　$2x+2y-z-5=0$，$-\frac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$.

二、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$，其中 n 是给定的正整数.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\exp\{\frac{e}{x}\ln(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n})\}$

$$=\exp\{\lim_{x\to 0}\frac{e(\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n)}{x}\}$$

其中大括号内的极限是 $\frac{0}{0}$ 型未定式，由 $L'Hospital$ 法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e(\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e(e^x+2e^x+\cdots+ne^{nx})}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$$

$$=\frac{e(1+2+\cdots+n)}{n}=(\frac{n+1}{2})e$$

于是　原式$=e^{(\frac{n+1}{2})e}$.

三、设函数 $f(x)$ 连续, $g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$, A 为常数，求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解：由题设，知 $f(0)=0$， $g(0)=0$.

令 $u=xt$，得 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(u)du}{x}\quad (x\neq 0)$，

从而 $g'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}\quad (x\neq 0)$

由导数定义有

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$

由于

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du}{x^2}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=g'(0),$$

从而知 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

四、已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le \pi,\ 0\le y\le \pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界，试证：

（1）$\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint\limits_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$；

（2）$\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx\ge \frac{5}{2}\pi^2$.

证法一：由于区域 D 为一正方形，可以直接用对坐标曲线积分的计算法计算.

(1) 左边 $=\int_0^{\pi}\pi e^{\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$，

右边 $=\int_0^{\pi}\pi e^{-\sin y}dy-\int_{\pi}^{0}\pi e^{\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx$，

所以 $\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\oint\limits_L xe^{-\sin y}dy-ye^{\sin x}dx$

(2) 由于 $e^{\sin x}+e^{-\sin x}\ge 2+\sin^2 x$，

$$\oint\limits_L xe^{\sin y}dy-ye^{-\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x}+e^{-\sin x})dx\ge \frac{5}{2}\pi^2 .$$

证法二：（1）根据 $Green$ 公式，将曲线积分化为区域 D 上的二重积分

$$\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x})d\delta$$

$$\oint_L xe^{-\sin y}dy - ye^{\sin x}dx = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x})d\delta$$

因为 关于 $y = x$ 对称，所以 $\iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x})d\delta = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x})d\delta$ ，故

$$\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \oint_L xe^{-\sin y}dy - ye^{\sin x}dx \quad .$$

(2) 由 $e^t + e^{-t} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!} \geq 2 + t^2$

$$\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x})d\delta = \iint_D (e^{\sin x} + e^{-\sin x})d\delta \geq \frac{5}{2}\pi^2 .$$

五、已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$ ， $y_2 = xe^x + e^{-x}$ ， $y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

解：根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识，由题设可知：e^{2x} 与 e^{-x} 是相应齐次方程两个线性无关的解，且 xe^x 是非齐次的一个特解.因此可以用下述两种解法

解法一： 故此方程式 $y'' - y' - 2y = f(x)$

将 $y = xe^x$ 代入上式，得

$$f(x) = (xe^x)'' - (xe^x)' - 2xe^x = 2e^x + xe^x - e^x - xe^x - 2xe^x = e^x - 2xe^x \quad ,$$

因此所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$.

解法二：故 $y = xe^x + c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$ ，是所求方程的通解，

由 $y' = e^x + xe^x + 2c_1e^{2x} - c_2e^{-x}$ ， $y'' = 2e^x + xe^x + 4c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$ ，消去 c_1，c_2 得所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$.

六、设抛物线 $y = ax^2 + bx + 2\ln c$ 过原点，当 $0 \leq x \leq 1$ 时，$y \geq 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a，b，c，使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

解： 因抛物线过原点，故 $c = 1$

由题设有 $\int_0^1(ax^2+bx)dx=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}$.即 $b=\frac{2}{3}(1-a)$ ，

而 $V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2dx=\pi[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2]$

$=\pi[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-a)^2]$.

令 $\frac{dv}{da}=\pi[\frac{2}{5}a+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a-\frac{8}{27}(1-a)]=0$,

得 $a=-\frac{5}{4}$ ，代入 b 的表达式 得 $b=\frac{3}{2}$. 所以 $y\geq 0$,

又因 $\frac{d^2v}{da^2}|_{a=-\frac{5}{4}}=\pi[\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+\frac{8}{27}]=\frac{4}{135}\pi>0$ 及实际情况，当 $a=-\frac{5}{4},\ b=\frac{3}{2},\ c=1$ 时，体积最小.

七、已知 $u_n(x)$ 满足

$u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$ （n 为正整数），

且 $u_n(1)=\frac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和.

解：先解一阶常系数微分方程，求出 $u_n(x)$ 的表达式，然后再求 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和.

由已知条件可知 $u_n'(x)-u_n(x)=x^{n-1}e^x$ 是关于 $u_n(x)$ 的一个一阶常系数线性微分方程，故其通解为

$$u_n(x)=e^{\int dx}(\int x^{n-1}e^xe^{-\int dx}dx+c)=e^x(\frac{x^n}{n}+c)$$ ，

由条件 $u_n(1)=\frac{e}{n}$，得 $c=0$，故 $u_n(x)=\frac{x^ne^x}{n}$，

从而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^ne^x}{n}=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ ， 其 收 敛 域 为 $[-1,\ 1)$ ， 当 $x\in(-1,\ 1)$ 时 ， 有

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$ ，

故 $s(x)=\int_0^x \frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$

当 $x=-1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^{-1}\ln 2$.

于是，当 $-1\le x<1$ 时，有 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^{x}\ln(1-x)$.

八、求 $x\to 1-$ 时，与 $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

解：$\int_0^{+\infty}x^{t^2}dt\le\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}\le 1+\int_0^{+\infty}x^{t^2}dt$，

$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t^2\ln\frac{1}{x}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}}\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$

首届全国大学生数学竞赛赛区赛试卷参考答案

（数学类，2009）

一、求经过三平行直线$L_1: x=y=z$，$L_2: x-1=y=z+1$，$L_3: x=y+1=z-1$的圆柱面的方程.

解： 先求圆柱面的轴L_0的方程. 由已知条件易知，圆柱面母线的方向是$\vec{n}=(1,1,1)$，且圆柱面经过点$O(0,0,0)$，过点$O(0,0,0)$且垂直于$\vec{n}=(1,1,1)$的平面π的方程为：$x+y+z=0$.

π与三已知直线的交点分别为$O(0,0,0), P(1,0,-1), Q(0,-1,1)$

圆柱面的轴L_0是到这三点等距离的点的轨迹，即

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+y^2+(z+1)^2 \\ x^2+y^2+z^2=x^2+(y+1)^2+(z-1)^2 \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} x-z=1 \\ y-z=-1 \end{cases},$$

将L_0的方程改为标准方程

$$x-1=y+1=z.$$

圆柱面的半径即为平行直线$x=y=z$和$x-1=y+1=z$之间的距离. $P_0(1,-1,0)$为L_0上的点.

对圆柱面上任意一点$S(x,y,z)$，有$\dfrac{|\vec{n}\times\overrightarrow{P_0S}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|\vec{n}\times\overrightarrow{P_0O}|}{|\vec{n}|}$，即

$$(-y+z-1)^2+(x-z-1)^2+(-x+y+2)^2=6,$$

所以，所求圆柱面的方程为：

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz-3x+3y=0.$$

二、设$C^{n\times n}$是$n\times n$复矩阵全体在通常的运算下所构成的复数域C上的线性空间，

$$F=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

（1）假设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，若 $AF=FA$，证明：

$A=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E$；

（2）求 $C^{n\times n}$ 的子空间 $C(F)=\left\{X\in C^{n\times n}\mid FX=XF\right\}$ 的维数.

（1）的证明: 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$， $M=a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E$.

要证明 $M=A$，只需证明 A 与 M 的各个列向量对应相等即可.若以 e_i 记第 i 个基本单位列向量.于是，只需证明：对每个 i， $Me_i=Ae_i(=\alpha_i)$.

若记 $\beta=(-a_n,-a_{n-1},\cdots,-a_1)^T$， 则 $F=(e_2,e_3,\cdots,e_n,\beta)$.注意到，

$Fe_1=e_2,F^2e_1=Fe_2=e_3,\cdots,F^{n-1}e_1=F(F^{n-2}e_1)=Fe_{n-1}=e_n$ （*）

由

$$\begin{aligned} Me_1&=(a_{n1}F^{n-1}+a_{n-11}F^{n-2}+\cdots+a_{21}F+a_{11}E)e_1 \\ &=a_{n1}F^{n-1}e_1+a_{n-11}F^{n-2}e_1+\cdots+a_{21}Fe_1+a_{11}Ee_1 \\ &=a_{n1}e_n+a_{n-11}e_{n-1}+\cdots+a_{21}e_2+a_{11}e_1 \\ &=\alpha_1=Ae_1 \end{aligned}$$

知 $Me_2=MFe_1=FMe_1=FAe_1=AFe_1=Ae_2$

$$Me_3=MF^2e_1=F^2Me_1=F^2Ae_1=AF^2e_1=Ae_3$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Me_n=MF^{n-1}e_1=F^{n-1}Me_1=F^{n-1}Ae_1=AF^{n-1}e_1=Ae_n$$

所以， $M=A$.

（2）解: 由（1）， $C(F)=span\{E,F,F^2,\cdots,F^{n-1}\}$，

设 $x_0E+x_1F+x_2F^2+\cdots+x_{n-1}F^{n-1}=O$， 等式两边同右乘 e_1，利用（*）得

$$\theta=Oe_1=(x_0E+x_1F+x_2F^2+\cdots+x_{n-1}F^{n-1})e_1$$

$$= x_0Ee_1 + x_1Fe_1 + x_2F^2e_1 + \cdots + x_{n-1}F^{n-1}e_1$$
$$= x_0e_1 + x_1e_2 + x_2e_3 + \cdots + x_{n-1}e_n$$

因$e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n$线性无关，故，$x_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$

所以，$E, F, F^2, \cdots, F^{n-1}$线性无关.因此，$E, F, F^2, \cdots, F^{n-1}$是$C(F)$的基，

特别地，$\dim C(F) = n$.

三、假设V是复数域C上n维线性空间（$n > 0$），f, g是V上的线性变换.如果 $fg - gf = f$，证明：f的特征值都是0，且f, g有公共特征向量.

证明： 假设λ_0是f的特征值，W是相应的特征子空间，即 $W = \left\{\eta \in V \mid f(\eta) = \lambda_0\eta\right\}$.于是，$W$在$f$下是不变的.

下面先证明，λ_0=0.任取非零$\eta \in W$，记m为使得$\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^m(\eta)$线性相关的最小的非负整数，于是，当$0 \le i \le m-1$时，$\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^i(\eta)$线性无关

$0 \le i \le m-1$时令$W_i = span\{\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^{i-1}(\eta)\}$，其中，$W_0 = \{\theta\}$.因此，$\dim W_i = i$（$1 \le i \le m$），并且，$W_m = W_{m+1} = W_{m+2} = \cdots$. 显然，$g(W_i) \subseteq W_{i+1}$，特别地，$W_m$在$g$下是不变的.

下面证明，W_m在f下也是不变的.事实上，由$f(\eta) = \lambda_0\eta$，知

$$fg(\eta) = gf(\eta) + f(\eta) = \lambda_0 g(\eta) + \lambda_0\eta$$

$$\begin{aligned} fg^2(\eta) &= gfg(\eta) + fg(\eta) \\ &= g(\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0\eta) + (\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0\eta) \\ &= \lambda_0 g^2(\eta) + 2\lambda_0 g(\eta) + \lambda_0\eta \end{aligned}$$

根据

$$\begin{aligned} fg^k(\eta) &= gfg^{k-1}(\eta) + fg^{k-1}(\eta) \\ &= g(fg^{k-1})(\eta) + fg^{k-1}(\eta) \end{aligned}$$

用归纳法不难证明，$fg^k(\eta)$一定可以表示成$\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^k(\eta)$的线性组合，且表示式中$g^k(\eta)$前的系数为$\lambda_0$.

因此，W_m在f下也是不变的，f在W_m上的限制在基$\eta, g(\eta), g^2(\eta), \cdots, g^{m-1}(\eta)$

下的矩阵是上三角矩阵，且对角线元素都是λ_0，因而，这一限制的迹为$m\lambda_0$. …..（10 分)

由于$fg-gf=f$在W_m上仍然成立，而$fg-gf$的迹一定为零，故$m\lambda_0=0$，即λ_0=0.

任取$\eta\in W$，由于$f(\eta)=\theta$，$fg(\eta)=gf(\eta)+f(\eta)=g(\theta)+f(\eta)=\theta$，所以，$g(\eta)\in W$.因此，$W$在$g$下是不变的.从而，在$W$中存在$g$的特征向量，这也是$f,g$的公共特征向量.

四、设$\{f_n(x)\}$是定义在$[a,b]$上的无穷次可微的函数序列且逐点收敛，并在$[a,b]$上满足$|f_n'(x)|\le M$.（1）证明$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛；（2）设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$，问$f(x)$是否一定在$[a,b]$上处处可导,为什么？

证明：（1）$\forall\varepsilon>0$，将区间$[a,b]$ K等分，分点为$x_j=a+\dfrac{j(b-a)}{K},\quad j=0,1,2,\cdots,K$，使得$\dfrac{b-a}{K}<\varepsilon$. 由于$\{f_n(x)\}$在有限个点$\{x_j\}, j=0,1,2,\cdots,K$上收敛，因此$\exists N$，$\forall m>n>N$，使得$|f_m(x_j)-f_n(x_j)|<\varepsilon$ 对每个$j=0,1,2,\cdots,K$成立.

于是$\forall x\in[a,b]$，设$x\in[x_j,x_{j+1}]$，则

$$|f_m(x)-f_n(x)|\le|f_m(x)-f_m(x_j)|+|f_m(x_j)-f_n(x_j)|+|f_n(x_j)-f_n(x)|,$$

$$=|f_m'(\xi)(x-x_j)|+|f_m(x_j)-f_n(x_j)|+|f_n'(\eta)(x-x_j)|<(2M+1)\varepsilon.$$

（2）不一定.

令 $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$，则$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$在$[a,b]$上不能保证处处可导.

五、设$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\dfrac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt$，　证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}$发散.

解：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt=\int_0^{\frac{\pi}{n}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt+\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}}t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3dt=I_1+I_2$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{n}} t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3 dt < n^3\int_0^{\frac{\pi}{n}} tdt=\frac{\pi^2 n}{2},$$

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} t\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right|^3 dt < \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} t\cdot\left(\frac{\pi}{2t}\right)^3 dt=-\frac{\pi^3}{8}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$=\frac{\pi^3}{8}\left(\frac{n}{\pi}-\frac{2}{\pi}\right)<\frac{\pi^2 n}{8}.$$

因此$\frac{1}{a_n}>\frac{1}{\pi^2 n}$，由此得到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$发散.

六、 $f(x,y)$ 是 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上二次连续可微函数，满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2y^2$，计算积分

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy.$$

解： 采用极坐标$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$I=\int_0^1 dr\int_0^{2\pi}\left(\cos\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\right)rd\theta=\int_0^1 dr\int_{x^2+y^2=r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dy-\frac{\partial f}{\partial y}dx\right)$$

$$=\int_0^1 dr\iint_{x^2+y^2\le r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial y^2}\right)dxdy=\int_0^1 dr\iint_{x^2+y^2\le r^2}\left(x^2y^2\right)dxdy$$

$$=\int_0^1 dr\int_0^r \rho^5 d\rho\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta=\frac{\pi}{168}$$

七、假设函数 $f(x)$ 在 $[0,\ 1]$ 上连续，在 $(0,\ 1)$ 内二阶可导，过点 $A(0,\ f(0))$，与点 $B(1,\ f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,\ f(c))$，其中 $0<c<1$. 证明：在 $(0,\ 1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

证明：因为 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上满足 *Lagrange* 中值定理的条件，故存在 $\xi_1\in(0,\ c)$， 使 $f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}$.

由于 C 在弦 AB 上，故有

$$\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0).$$

从而 $f'(\xi_1)=f(1)-f(0)$.

同理可证，存在 $\xi_2\in(c,\ 1)$，使 $f'(\xi_2)=f(1)-f(0)$.

由 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$，知 在$[\xi_1,\ \xi_2]$上 $f'(x)$满足 *Rolle* 定理的条件，所以存在 $\xi\in(\xi_1,\ \xi_2)\subset(0,\ 1)$，使 $f''(\xi)=0$.

第二届全国大学生数学竞赛决赛试卷

（非数学类，2011 年 3 月）

考试形式：<u>闭卷</u>　考试时间：<u>150</u> 分钟　满分：<u>100</u> 分.

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满分	15	10	15	17	16	12	15	100
得分								

注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其他纸上一律无效.
2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.
3、如当题空白不够，可写在当页的背面，并标明题号.

得　分	
评阅人	

一、（本题共 3 小题，每小题各 5 分，共 15 分）计算下列各题（要求写出重要步骤）.

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$；

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$；

（3） 已知 $\begin{cases} x=\ln(1+\mathrm{e}^{2t}) \\ y=t-\arctan \mathrm{e}^{t}, \end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

得　分	
评阅人	

二、（本题 10 分）求方程

$(2x+y-4)\mathrm{d}x+(x+y-1)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

得　分	
评阅人	

三、（本题 15 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数，且 $f(0)$， $f'(0)$， $f''(0)$ 均不为零. 证明：存在唯一一组实数 k_1,k_2,k_3，使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

得　分	
评阅人	

四、（本题 17 分）设 Σ_1： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$，其中 $a>b>c>0$，

Σ_2： $z^2 = x^2 + y^2$， Γ 为 Σ_1 和 Σ_2 的交线. 求椭球面 Σ_1 在 Γ 上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值.

得　分	
评阅人	

五、（本题 16 分）已知 S 是空间曲线 $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转形成的椭球面的上半部分（$z \geq 0$）（取上侧）， Π 是 S 在 $P(x, y, z)$ 点处的切平面, $\rho(x, y, z)$ 是原点到切平面 Π 的距离， λ, μ, ν 表示 S 的正法向的方向余弦.

计算：（1） $\iint\limits_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} \mathrm{d}S$； （2） $\iint\limits_S z(\lambda x + 3\mu y + \nu z) \mathrm{d}S$.

得　分	
评阅人	

六、（本题 12 分）设 $f(x)$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 内的可微函数，且 $|f'(x)| < mf(x)$ ，其中 $0 < m < 1$. 任取实数 a_0 ，定义 $a_n = \ln f(a_{n-1}), n = 1, 2, \cdots$. 证明： $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛.

得　分	
评阅人	

七、（本题 15 分）是否存在区间 $[0, 2]$ 上的连续可微函数 $f(x)$，满足 $f(0) = f(2) = 1$， $|f'(x)| \leq 1$， $\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right| \leq 1$？请说明理由.

首届全国大学生数学竞赛决赛试卷

（非数学类，2010）

一、 计算下列各题（要求写出重要步骤）.

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}(1+\frac{k}{n})\sin\frac{k\pi}{n^2}$.

(2) 计算 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-y^2-x^2}$ 的上侧，$a>0$.

(3) 现要设计一个容积为 V 的一个圆柱体的容器. 已知上下两底的材料费为单位面积 a 元，而侧面的材料费为单位面积 b 元.试给出最节省的设计方案：即高与上下底的直径之比为何值时所需费用最少？

(4) 已知 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ 内满足 $f'(x)=\frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}$，求 $f(x)$.

二、求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right)$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n$，其中 $a>0,b>0,c>0$

三、设 $f(x)$ 在 $x=1$ 点附近有定义，且在 $x=1$ 点可导，$f(1)=0,f'(1)=2$. 求

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)}{x^2+x\tan x}.$$

四、设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，无穷积分 $\int_0^{\infty}f(x)dx$ 收敛.

求 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y xf(x)dx$

五、设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$. 证明：(1) 存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $f(\xi)=\xi$；(2) 存在 $\eta\in(0,\xi)$ 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

六、设 $n>1$ 为整数，

$$F(x)=\int_0^x e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+...+\frac{t^n}{n!}\right)dt.$$

证明: 方程 $F(x)=\frac{n}{2}$ 在 $\left(\frac{n}{2},n\right)$ 内至少有一个根.

七、是否存在 $\mathbb{R}^1$ 中的可微函数 $f(x)$ 使得

$$f(f(x))=1+x^2+x^4-x^3-x^5 ?$$

若存在，请给出一个例子；若不存在，请给出证明.

八、设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续，且对于固定的 $x\in[0,\infty)$，当自然数 $n\to\infty$ 时 $f(x+n)\to 0$. 证明: 函数序列 $\{f(x+n):n=1,2,...\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0.

首届全国大学生数学竞赛决赛试卷

（数学类，2010）

一、　填空题

(1) 设$\beta>\alpha>0$，则$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x^2}dx=$______________.

(2) 若关于 x 的方程 $kx+\frac{1}{x^2}=1(k>0)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有惟一实数解，则常数 $k=$______________.

(3) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续. 由积分中值公式有 $\int_a^x f(t)dt=(x-a)f(\xi)$ $(a\le\xi\le x<b)$. 若导数 $f_+'(a)$ 存在且非零，则 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\xi-a}{x-a}$ 的值等于______________.

(4) 设 $(\vec{a}\times\vec{b})\bullet\vec{c}=6$，则 $\left((\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})\right)\bullet(\vec{a}+\vec{c})=$______________.

二、设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有定义，在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{f'(0)}{2}.$$

三、设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续，且对于固定的 $x\in[0,\infty)$，当自然数 $n\to\infty$ 时 $f(x+n)\to 0$.

证明: 函数序列 $\{f(x+n)$: $n=1,2,\cdots\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0.

四、设 $D=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$，$f(x,y)$ 在 D 内连续，$g(x,y)$ 在 D 内连续有界，且满足条件：(1) 当 $x^2+y^2\to 1$ 时，$f(x,y)\to+\infty$；

(2) 在 D 中 f 与 g 有二阶偏导数，　$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^f$，　$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\ge e^g$.

证明：　$f(x,y)\ge g(x,y)$ 在 D 内处处成立.

五、设　$R=\{(x,y):0\le x\le 1;0\le y\le 1\}$

$$R_\varepsilon=\{(x,y):0\le x\le 1-\varepsilon;0\le y\le 1-\varepsilon\}.$$

考虑积分 $I=\iint_R\frac{dxdy}{1-xy}$，　$I_\varepsilon=\iint_{R_\varepsilon}\frac{dxdy}{1-xy}$，　定义　$I=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}I_\varepsilon$.

（1） 证明$I=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$；

（2）利用变量替换：$\begin{cases} u=\frac{1}{2}(x+y) \\ v=\frac{1}{2}(y-x) \end{cases}$ 计算积分 I 的值，并由此推出$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

六、已知两直线的方程：$L: x=y=z$，$L':\frac{x}{1}=\frac{y}{a}=\frac{z-b}{1}$.（1）问：参数$a,b$满足什么条件时，$L$与$L'$是异面直线？

（2）当L与L'不重合时，求L'绕L旋转所生成的旋转面π的方程，并指出曲面π的类型.

七、设A,B均为n阶半正定实对称矩阵，且满足$n-1\le \text{rank } A\le n$. 证明: 存在实可逆矩阵$C$使得$C^TAC$和$C^TBC$均为对角阵.

八、设V是复数域$\mathbb{C}$上的n维线性空间，$f_j:V\to\mathbb{C}$（$j=1,2$）是非零的线性函数, 且线性无关.

证明: 任意的$\alpha\in V$都可表为$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$,使得

$$f_1(\alpha)=f_1(\alpha_2)，\quad f_2(\alpha)=f_2(\alpha_1).$$